Dokumentation zur Performanceuntersuchung

Tanja Veža

Juni 2004

Im Laufe der Untersuchungen zum Thema risikoangepaßte Portfolioperformance sind folgende Fragestellungen zu berücksichtigen gewesen:

1. Die effektive Dauer eines Wirtschaftsjahres bei Aktien und Zinsanlagen ist unterschiedlich und muß in Einklang gebracht werden.

2. Abhängig vom Zweck sind bei der Verwendung der errechneten Anteile im RAP bzw. CAP zwei Sichtweisen zu unterscheiden.

3. Für den angestrebten Tracking Error in Muralidhar (2000) ergibt sich aus dem mathematischen Zusammenhang eine Einschränkung.

Im Folgenden werden jeweils die Problematik und die Lösungsansätze näher beschrieben. Zusätzlich dazu sind im letzten Abschnitt zwei unabhängige Themen angesprochen:

- unterschiedliche Definitionen der Information Ratio und ihr Zusammenhang,

- das Linearisieren der Volatilität eines Wertpapiers in Fremdwährung.

1 Effektives Wirtschaftsjahr

Zeitreihen von täglichen Aktienkursen haben pro Kalenderjahr eine durchschnittliche Länge von ca. 250 Beobachtungen, entsprechend der Anzahl der Börsentage im Jahr. Da für die Wirtschaft relevante Nachrichten theoretisch auch an Wochenenden und Feiertagen eintreffen können, würde man vermuten, daß diese neue Information statistisch nachweisbare Auswirkungen auf den Kursverlauf am folgenden Börsentag haben sollte (z.B. durch erhöhte Volatilität, zusätzliche Autokorrelation oder höheren Ertrag). Laut empirischen Studien jedoch sind solche Effekte statistisch nicht zu erkennen – diese Tage werden 'ausgeblendet' und es ergibt sich ein Ertrag, der nur einem Tag entspricht.

Im Gegensatz dazu wird bei Zinsanlagen generell ein Wirtschaftsjahr von 360 oder 365 Tagen bei der Berechnung verwendet, abhängig von der jeweiligen Konvention. Außerdem wird die Anzahl der Tage zwischen zwei Daten am häufigsten exakt bestimmt, was zur Folge hat, daß Zinsen auch über Wochenenden und Feiertage verrechnet werden. Diese Tage werden bei Zinsinstrumenten somit *nicht* 'ausgeblendet' und es ergibt sich ein Ertrag, der der wahren Anzahl von Tagen entspricht.

Um zu erreichen, daß Erträge bei Aktien und Geldmarktanlagen der selben Anzahl von Tagen entsprechen, müßte man also entweder bei Aktienkursen künstlich einen (erhöhten) Ertrag erzeugen (z.B. indem man den Ertrag mit der Anzahl der ausgelassenen Tage multiplizierte) oder Wochenenden und Feiertage auch bei Zinsinstrumenten nicht in die Berechnung einfließen lassen, indem man ein Jahr von 250 Tagen annimmt. Da uns die erstere Kompromißlösung zweifelhafter erschien, fiel die Entscheidung auf die letztere Variante: wir nahmen an, ein Wirtschaftsjahr habe 250 Tage, und berechneten Zinserträge konsistent nur über einen Tag, d.h. unabhängig von der wahren Anzahl der zwischen zwei Daten liegenden Tage.

2 Anteile im RAP bzw. CAP

Die errechneten jährlichen Anteile im RAP bzw. CAP von Portfolio, Geldmarkt und Benchmark können zu verschiedenen Zwecken verwendet werden:

- zur Bestimmung einer zukünftigen Investmentstrategie, oder
- zur Beurteilung der bisherigen Portfolioperformance.

Angenommen man möchte den Erfolg einer Investmentstrategie bewerten (oder eine solche durchführen), die darauf beruht, periodisch die Anteile im RAP so anzupassen, daß sie die Zusammensetzung widerspiegeln, die man im Laufe der unmittelbar vergangenen Zeitperiode hätte halten sollen. In diesem Fall kennt man die Volatilitäten noch nicht, die das Portfolio und die Benchmark über die kommende Zeitperiode aufweisen werden, und setzt voraus, daß sie der bisherigen Volatilitäten gleich sein werden. Rückblickend würde man dann sicherlich feststellen, daß man einen anderen Anteil hätte halten sollen, der jedoch zum Zeitpunkt der Entscheidung nicht im Voraus bekannt war. Vom Anfangszeitpunkt der Beobachtungsperiode aus gesehen benutzt man hier die *rückblickenden* Anteile.

Andererseits, möchte man die risikoangepaßte Performance eines Portfolios über einen gewählten Zeithorizont bewerten, z.B. in einer graphischen Darstellung des Kursverlaufs, so vergleicht man die Performance einer passend gewählten Benchmark mit der Performance des zugehörigen RAP, wobei sich dieses RAP aus Portfolio- und Geldmarktanteilen zusammensetzt, die den Volatilitäten des Portfolios und der Benchmark über diesen Zeithorizont entsprechen. Wieder vom Anfangszeitpunkt der Beobachtungsperiode aus gesehen benutzt man also die *vorausblickenden* Anteile.

Den Erfolg der oben beschriebenen Strategie würde man anschließend durch einen Performancevergleich der beiden RAPs mit den unterschiedlichen Zusammensetzungen beurteilen. Da in unserem Fall die Evaluierung der Fondsperformance im Vordergrund steht, verwenden wir daher immer die vorausblickenden Anteile.

3 Einschränkung auf den angestrebten TE

Muralidhar (2000) erhebt folgenden Einwand gegen das RAP: das Modigliani-Maß bevorzugt Investmentfonds mit geringerer Korrelation mit der Benchmark, weil solche wahrscheinlicher eine bessere risikoangepaßte Performance aufweisen. Nimmt jedoch die Korrelation des RAP mit der Benchmark ab, so steigt der Tracking Error des RAP, was aus folgender einfacher Darstellung ersichtlich ist:

$$\begin{aligned}(TE_{RAP,B})^2 &= \sigma^2(r_{RAP} - r_B) \\ &= \sigma_{RAP}^2 + \sigma_B^2 - 2\,\rho_{RAP,B}\,\sigma_{RAP}\,\sigma_B \\ &= 2\,\sigma_B^2\,(1 - \rho_{RAP,B}) \qquad (1)\end{aligned}$$

Die Konstruktion des CAP in Muralidhar (2000) beruht daher auf zwei Annahmen:

- wie beim RAP, entspricht die Volatilität des CAP ebenso der Volatilität der Benchmark, und
- der Tracking Error des CAP, gemessen als die Standardabweichung des aktiven Ertrags, d.h. der Ertragsdifferenzen zwischen Portfolio und Benchmark ($r_{CAP} - r_B$, vgl. Fulmek (2003), Definition 4), wird zusätzlich im Voraus festgesetzt.

Die Korrelation von CAP und Benchmark in (1) läßt sich ausdrücken als

$$\rho_{CAP,B} = 1 - \frac{(TE(Ziel))^2}{2\,\sigma_B^2}$$

und muß als solche zwischen -1 und $+1$ liegen. Durch einfache Umformungen ergibt sich daraus die Bedingung

$$0 \leq \frac{(TE(Ziel))^2}{2\,\sigma_B^2} \leq 2.$$

Da die Volatilität der Benchmark, σ_B, für jeden Betrachtungszeitraum gegeben ist, geht hieraus die Einschränkung auf den Ziel-Tracking-Error hervor:

$$0 \leq TE(Ziel) \leq 2\,\sigma_B\,.$$

Es ist nun klar, daß der angestrebte Tracking Error nicht völlig frei wählbar ist und von der Volatilität der Benchmark im Betrachtungszeitraum abhängt. Da diese im Voraus nicht bekannt ist, sollte man für den Ziel-Tracking-Error vorsichtshalber einen eher niedrigeren Wert wählen, wenn man die Fondsperformance auf diese Weise nachher beurteilen möchte. Im Nachhinein wiederum kann man aus dieser Einschränkung die Obergrenze für den Tracking Error des CAP im gegebenen Beobachtungszeitraum herauslesen.

4 Sonstiges

4.1 Die Information Ratio

Die Grundidee der Information Ratio (IR) ist, das 'signal-to-noise' Verhältnis für das zu bewertende Portfolio zu quantifizieren. In der Literatur sind zwei Definitionsansätze vorgeschlagen.

Eine Definition geht aus der Regression hervor, z.B. aus der einfachsten Jensen Regression der Mehrerträge von Portfolio und Benchmark:

$$r_{P,t} - r_{F,t} = \alpha_P + \beta_P(r_{B,t} - r_{F,t}) + \epsilon_t\,.$$

Die IR wird in diesem Zusammenhang definiert als

$$IR_{reg} = \frac{\alpha_P}{\sigma_\epsilon}\,,$$

wobei mit σ_ϵ die Standardabweichung der Residuen bezeichnet ist (vgl. Fulmek (2003), Definition 3 und Abschnitt 4.2). Für die Schätzer gilt:

$$\begin{aligned}
\widehat{\alpha}_P &= \widehat{\mathbb{E}}[r_P - r_F] - \frac{s_{PB}}{s_B^2}\,\widehat{\mathbb{E}}[r_B - r_F], \\
\widehat{\sigma}_\epsilon^2 &= \frac{n}{n-2}\left(s_P^2 - \frac{s_{PB}^2}{s_B^2}\right) = \frac{n}{n-2}\,s_P^2\,(1-\rho_{PB}^2),
\end{aligned}$$

wobei $\rho_{PB} = \frac{s_{PB}^2}{s_P s_B}$ der Korrelationskoeffizient zwischen den Mehrerträgen von Portfolio und Benchmark ist und

$$\begin{aligned}
s_{PB} &= \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left\{(r_{B,t} - r_{F,t}) - \mathbb{E}[r_B - r_F]\right\}\left\{(r_{P,t} - r_{F,t}) - \mathbb{E}[r_P - r_F]\right\}, \\
s_i^2 &= \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left\{(r_{i,t} - r_{F,t}) - \mathbb{E}[r_i - r_F]\right\}^2, \quad i = P, B.
\end{aligned}$$

Es kann ein beliebiges Regressionsmodell verwendet werden, um die Fondserträge durch zusätzliche Faktoren zu erklären (z.B. Carhart Regression mit Faktoren für 'book-to-market', Marktkapitalisierung und 'momentum').

Ein häufiger alternativer Ansatz ist, in der Definition der IR den mittleren aktiven Fondsertrag und als Risikomaß den Tracking Error (TE^4 in Fulmek (2003)) zu verwenden:

$$IR_{TE} = \frac{\mathbb{E}[r_P - r_B]}{\sigma(r_P - r_B)}\,,$$

vgl. Fulmek (2003), Gleichung (23).

Die IR_{TE} kann folgendermaßen über die IR_{reg} dargestellt werden:

$$
\begin{aligned}
IR_{TE} &= \frac{\mathbb{E}[(r_P - r_F) - (r_B - r_F)]}{\sigma(r_P - r_B)} = \frac{\alpha_P + \beta_P\,\mathbb{E}[r_B - r_F] - \mathbb{E}[r_B - r_F]}{\sigma(r_P - r_B)} \\
&= \frac{\alpha_P}{\sigma(r_P - r_B)} + \frac{Cov(r_P - r_F, r_B - r_F)}{\sigma^2(r_B - r_F)}\,\frac{\mathbb{E}[r_B - r_F]}{\sigma(r_P - r_B)} - \frac{\mathbb{E}[r_B - r_F]}{\sigma(r_P - r_B)} \\
&= \frac{1}{\sigma(r_P - r_B)}\left\{IR_{reg}\,\sigma_\epsilon + \rho_{PB}\,SR_B\,\sigma(r_P - r_F) - \mathbb{E}[r_B - r_F]\right\},
\end{aligned}
$$

wobei die Abkürzung SR für die Sharpe Ratio steht.

Aus dieser Darstellung ist ersichtlich, daß die Abhängigkeit zwischen den beiden alternativen Definitionen der IR keineswegs eindeutig ist und von vielen Größen abhängt. Deshalb ist eine klare Aussage über das Verhältnis der beiden Werte leider nicht möglich.

4.2 Linearisieren der Volatilität bei Fremdwährung

Bei Investitionen in Wertpapiere in Fremdwährungen ist man nicht nur dem Kursrisiko dieser Wertpapiere ausgesetzt, sondern zusätzlich auch dem Währungsrisiko. Sei $S_F = e^{r_F}$ der Kurs, bzw. Ertrag des Wertpapiers in Fremdwährung, dann können diese in zwei Komponenten zerlegt werden – den Wertpapierkurs, S_W, bzw. -ertrag, r_W, in heimischer Währung, und den Devisenwechselkurs, S_D:

$$e^{r_F} = S_F = S_W S_D = e^{r_W} e^{r_D} = e^{r_W + r_D}.$$

Folglich läßt sich auch die Ertragsvarianz zerlegen:

$$\sigma_F^2 = \sigma^2(r_F) = \sigma^2(r_W + r_D) = \sigma_W^2 + \sigma_D^2 + 2\,\sigma_W\,\sigma_D\,\rho_{WD}\,.$$

Unser Ziel ist, die Abhängigkeit der Gesamtvolatilität σ_F von ρ_{WD} und σ_i, $i = W, D$, zu vereinfachen und eine linearisierte Näherungsformel zu finden. Zu diesem Zweck bedienen wir uns der Taylorentwicklung erster Ordnung, analog z.B. zur Berechnung der Duration einer festverzinslichen Anleihe oder des Delta einer Option. Dazu bilden wir die erste partielle Ableitung von σ_F nach den Variablen ρ_{WD} und σ_i, $i = W, D$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_F}{\partial \rho_{WD}}(\rho_{WD}) &= \frac{\sigma_W\,\sigma_D}{\sigma_F(\rho_{WD})}, \\
\frac{\partial \sigma_F}{\partial \sigma_i}(\sigma_i) &= \frac{\sigma_i + \sigma_j\,\rho_{WD}}{\sigma_F(\sigma_i)}, \quad i \neq j, \quad i, j = W, D.
\end{aligned}
$$

Diese Approximation ist nur lokal gültig, d.h. für geringe Wertänderungen der jeweiligen Variablen. Heuristisch interpretiert sagt die diskretisierte Taylorformel aus, um wie viel sich die Gesamtvolatilität verändert bei gegebener Änderung der Inputvariablen:

$$\begin{aligned}
\sigma_F(\rho_{WD}^{neu}) &= \sigma_F(\rho_{WD}^{alt}) + \Delta\sigma_F(\rho_{WD}^{alt}, \Delta\rho_{WD}) = \sigma_F(\rho_{WD}^{alt}) + \frac{\sigma_W\,\sigma_D}{\sigma_F(\rho_{WD}^{alt})}\,\Delta\rho_{WD}\,, \\
\sigma_F(\sigma_i^{neu}) &= \sigma_F(\sigma_i^{alt}) + \Delta\sigma_F(\sigma_i^{alt}, \Delta\sigma_i) = \sigma_F(\sigma_i^{alt}) + \frac{\sigma_i^{alt} + \sigma_j\,\rho_{WD}}{\sigma_F(\sigma_i^{alt})}\,\Delta\sigma_i\,.
\end{aligned}$$

5 Literatur

J. Fulmek, *Untersuchungen zum Thema Tracking Error*, August 2003.

F. Modigliani, L. Modigliani, *Risk-Adjusted Performance*, Journal of Portfolio Management, Winter 1997.

F. Moser, Handschriftliche Aufzeichnungen *Wertpapiere und Devisen*, Dezember 2003.

T. Moser, *Wie kann ich die Performance eines Investmentfonds mit der seiner Benchmark vergleichen?*, August 2001.

A.S. Muralidhar, *Risk-Adjusted Performance: The Correlation Correction*, Financial Analysts Journal, September/October 2000.

J. Schira, *Statistische Methoden der VWL und BWL*, Pearson Studium, 2003.

R. Wermers, Lehrveranstaltungsmaterialien zu *Performance Evaluation and Attribution*, CCEFM, Wien, Oktober 2002.